

Didaktisch interessante Anwendungsbeispiele trigonometrischer Funktionen

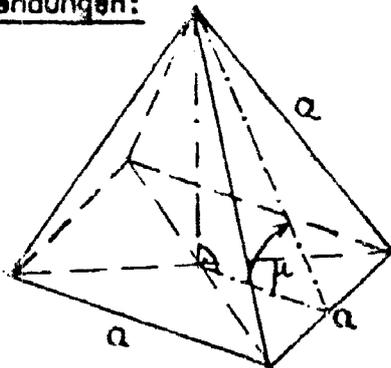
Normalprojektion auf eine Bildebene

Durch Normalprojektion auf eine Bildebene wird jede Strecke mit der Länge  $s$  auf eine Strecke mit der Länge  $s^* = s \cdot \cos \mu$  abgebildet ( $\mu$ ...Neigungswinkel der geg. Strecke gegen die Bildebene). Dieser Sachverhalt entspricht nur näherungsweise augenoptischen bzw. photographischen Erfahrungen.

Darüber hinaus erkennt man, daß ein analoges Abbildungsgesetz auch für ebene Flächenstücke  $F$  besteht; i.d.F. ist  $\mu$  der Neigungswinkel der ebenen Fläche  $F$  gegen die Bildebene:  $F^* = F \cdot \cos \mu$ .

Anwendungen:

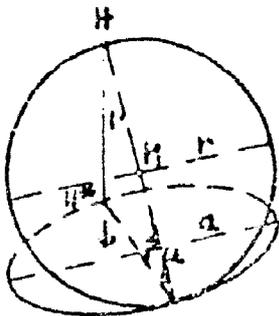
1.



Man berechne den Neigungswinkel der Seitenflächen einer gleichkantigen quadratischen Pyramide gegen die Grundfläche:

$$M = a^2 \sqrt{3}, M^* = a^2; \cos \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}; \mu = \underline{\underline{54,7356^\circ}}$$

2.



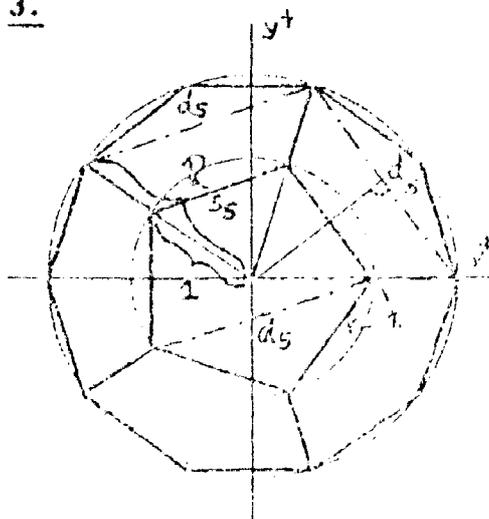
Eine Kreisscheibe ( $r$ ) liegt mit dem Winkel  $\mu$  schräg gegen die Bildebene; das Bild der Kreisscheibe erscheint in der Breite  $2r$ ; in Fallrichtung ist jedoch die "Länge" auf  $2r \cdot \cos \mu$  verkürzt. Daraus ergibt sich für die Fläche der Projektion:

$$K^* = K \cdot \cos \mu = r^2 \cdot \pi \cdot \cos \mu = r \cdot r \cdot \cos \mu \cdot \pi;$$

bei üblicher Form der Bezeichnung erhält man mit  $r=a, r \cdot \cos \mu = b$  die Flächenformel der Ellipse:

$$F_{Ell} = \underline{\underline{a \cdot b \cdot \pi}}$$

3.



Man berechne den Flächenwinkel in einem regelmäßigen Dodekaeder ( $r=1$ ).

Der Normalriß eines reg. (Halb-) Dodekaeders auf die Ebene seiner Mittelfläche führt zu einem regelm. 10-Eck. Die Mittelfläche ist parallel zur Bildebene. Somit gilt für den Normalriß der fünf Seitenflächen sowie für Mittelfläche und RiB:

$$F_5 + 5 \cdot F_5 \cdot \cos \mu = F_{10} \dots (a)$$

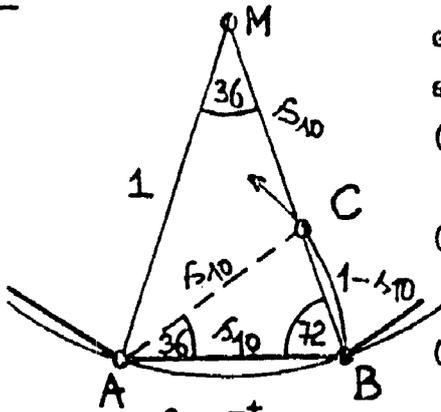
der gesuchte Flächenwinkel ist dann  $180 - \mu$ .

Zur Berechnung dient:  $s_5 = 2 \cdot \sin 36^\circ, d_5 = 2 \cdot \sin 72^\circ$ ;

ferner:  $1 : R = \sin 36^\circ : \sin 72^\circ$  bzw.  $R = 2 \cdot \cos 36^\circ$ .

$F_5 = \frac{5}{2} \cdot e \cdot n / 2 = 5 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ, F_{10} = \frac{10}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 36^\circ = 20 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos^2 36^\circ$ . Dies führt mittels (a) zu:  $5 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot (1 + 5 \cdot \cos \mu) = 20 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos^2 36^\circ$  und letztlich zu  $\cos \mu = \frac{4 \cdot \cos 36^\circ - 1}{5}$ ; der gesuchte Winkel ist  $116^\circ 33' 54''$ .

3\*



Man kann nun  $\cos 36$  mithilfe der exakten Konstruktion eines regelm. 10-Ecks, das dem Einheitskreis eingeschrieben ist, leicht berechnen.

(a) Wegen  $\triangle AMB \sim \triangle BAC$  gilt:

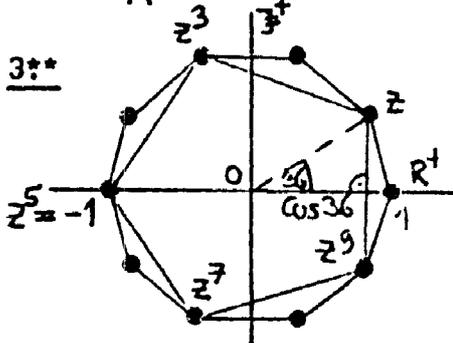
$$1 : s_{10} = s_{10} : (1 - s_{10}), \text{ also } s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

(b) Kosinussatz im  $\triangle AMB$ :

$$(s_{10}^2) = \frac{1}{4} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) = 2 - 2 \cdot \cos 36, \dots, \cos 36 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

(c) Somit gilt:  $\cos \mu = \dots = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}}}$

3\*\*



Es kann  $\cos 36$  auch mittels algebraischer Methoden errechnet werden. Man löse in  $\mathbb{C}$ :  $a^{10} - 1 = 0$  bzw.

$(a^5 - 1)(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = 0$ . Es bilden nun  $z, z^3, z^5, z^7, z^9$  ein regelm. 5-Eck mit der reellen Ecke  $z^5 = -1$ . Also sind  $z, z^3, z^7, z^9$  die Lösungen der Gleichung  $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 = 0$ .

Man setze nun:  $a = z + z^9 = 2 \cdot \cos 36$  und  $b = z^3 + z^7 = 2 \cdot \cos 108$  und erkenne:  $a + b = (z - z^4) + (z^3 - z^2) = 1$  (wegen  $z^5 = -1$ ) und  $a \cdot b = (z + z^9)(z^3 + z^7) = -1$ .

Also sind  $a, b$  die Lösungen der Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$  mit  $a > 0$  und  $b < 0$ .

Man erhält  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , somit  $\cos 36 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$  und  $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , somit  $\cos 108 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ .

Es läßt sich nun  $s_{10}$  ohne den planimetrischen Kunstgriff von 3\* zu kennen, analog zu 3\* zB. mittels des Kosinussatzes oder sogar mittels des Pyth. Seitensatzes allein berechnen:  $s_{10}^2 = \sin^2 36 + (1 - \cos 36)^2 = \dots = 2(1 - \cos 36) = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$ ;

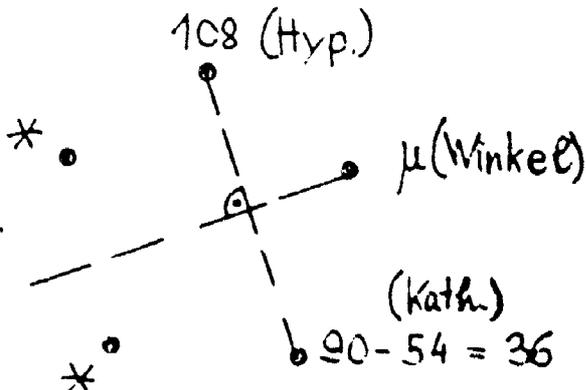
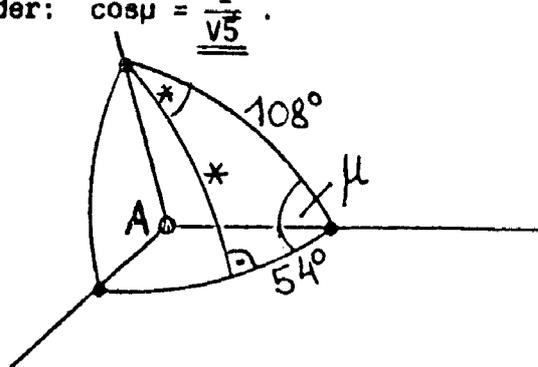
$s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ , man beachte:  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} > 0$ !

3\*\*\* Letztlich kann man  $\cos \mu$  direkt mithilfe der Rechenverfahren der Sphärischen Trigonometrie gewinnen. Die untenstehende Zeichnung zeigt eine Dodekaeder-ecke von innen; mit dem Eckpunkt A als Mittelpunkt wurde eine Kugelfläche eingezeichnet, die die zugehörigen 3 Fünfecke schneidet.

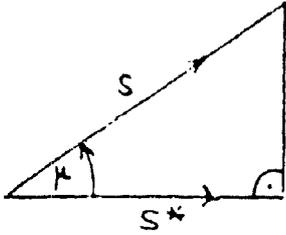
Unter Anwendung der NEPERschen Gedächtnisregel kommt man leicht auf  $\cos \mu = \cot 36 \cdot \cot 108$ . Man entnehme nun die Wurzelterme für  $\cot 36$  und  $\cot 108$

zB. der Tabelle "Vierstellige Logarithmen ..." von E. WAAGE, pg. 78 oben oder man berechne sie aus  $\cos 36$  bzw.  $\cos 108$  nach 3\*\* . Das Ergebnis ist

wieder:  $\cos \mu = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}}}$ .



4.



Eine Straße steigt im Mittel mit  $k\%$  ( $\frac{k}{100} = \tan \mu$ ).  
Um sich auf dieser Straße bezüglich der zugehörigen  
Straßenkarte um  $s^*$  km weiterbewegen zu können, hat man  
 $s = \frac{s^*}{\cos \mu}$  km zurückzulegen.

Das bequeme Ausrechnen der Fahrtstrecken ermöglicht  
die folgende Betrachtung:

$$\frac{1}{\cos \mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu}} \approx \sqrt{1 + \sin^2 \mu} \approx 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \mu \approx 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \mu \approx \sqrt{1 + \tan^2 \mu} (= \sqrt{1 + (y')^2})$$

Numerisches Beispiel für  $s^* = 1$  km :

- (a) 6% ...  $s_{\text{ex}} = 1,0018$  ,  $s_{\text{nw}} = 1,0018$  ; +0,0002 % (ex ... exakt, nw ... näherungsweise)
- (b) 12% ...  $s_{\text{ex}} = 1,0072$  ,  $s_{\text{nw}} = 1,0072$  ; +0,0026 %
- (c) 22% ...  $s_{\text{ex}} = 1,0239$  ,  $s_{\text{nw}} = 1,0242$  ; +0,0279 %

(Die Toleranz wird erst bei etwa 57,15% Steigung größer als 1% von  $s_{\text{ex}}$ )

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung leuchtet unmittelbar ein ( $k$  ist stets eine mittlere Steigung); bei variabler Steigung kann man also mit geeignetem Mittelwert  $\theta$  arbeiten:  $s = s^* \cdot (1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta)$ .

Dies führt zu den folgenden Betrachtungen.

5. Bogenlängenberechnung an der NEIL'schen Parabel:  $y = x^{3/2}$ ,  $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ,  $y'(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$   
über dem Intervall  $[0; \frac{1}{4}]$  :

a) Berechnung des exakten Wertes ist in diesem Fall möglich.

$$\int_0^{1/4} \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{8}{27} \cdot (1 + \frac{9x}{4})^{3/2} \Big|_0^{1/4} = \frac{8}{27} \cdot \left[ (1 + \frac{9}{16})^{3/2} - 1 \right] = \frac{8}{27} \cdot (\frac{125}{64} - 1) = \dots = \underline{\underline{\frac{61}{216}}}$$

also numerischer Wert:  $s = \underline{\underline{0,282\ 407}}$ .

b) Näherungsweise Berechnung mit mittlerer Steigung  $\frac{3}{8}$  (arithm. Mittel) führt auf:  
 $s = \frac{1}{4} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64}) = \underline{\underline{0,267\ 578}}$  (-5,25 %)

c) Bei Halbierung des Intervalls hat man zu rechnen:

$$\begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y'(\frac{1}{8}) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \\ y'(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \end{array} > \begin{array}{l} y'_1 = \frac{3\sqrt{2}}{16} \\ y'_2 = \frac{3(2+\sqrt{2})}{16} \end{array} \quad \left| \quad s = \frac{1}{8} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{256} + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9(6+4\sqrt{2})}{256}) = \dots = \frac{274+9\sqrt{2}}{1024} = \underline{\underline{0,280\ 008}} \text{ (-0,85 \%)} \right.$$

d) Bei Teilung des Intervalls in 5 gleiche Teile hat man zu rechnen:

$$\begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y'(0,05) = 0,335\ 410 \\ y'(0,1) = 0,474\ 342 \\ y'(0,15) = 0,580\ 948 \\ y'(0,2) = 0,670\ 820 \\ y'(0,25) = 0,75 \end{array} > \begin{array}{l} y'_1 = 0,167\ 705 \\ y'_2 = 0,404\ 876 \\ y'_3 = 0,527\ 645 \\ y'_4 = 0,625\ 884 \\ y'_5 = 0,710\ 410 \end{array} \quad \left| \quad s = \frac{1}{20} \cdot (5 + 0,014\ 062 + 0,081\ 962 + 0,139\ 205 + 0,195\ 865 + 0,252\ 341) = \underline{\underline{0,284\ 172}} \text{ (+0,62 \%)} \right.$$

6. Bogenlängenberechnung an der Grundparabel  $y = x^2$ ,  $y' = 2x$ .

a) Exakte Berechnung ist möglich (Verifikation durch Differenzieren):

$$s = \frac{1}{4} \cdot \left[ 2x \cdot \sqrt{1+4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1+4x^2}) \right] \Big|_0^1 ; s_{ax} = \frac{1}{4} \cdot \left[ \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right] = \underline{\underline{0,573397}}$$

b)  $y'_1(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$  (mittlere Steigung im gegebenen Intervall),

$$s_{nw} = \underline{\underline{0,5625}}$$
, Fehler: -1,96 % .

c) Bei Halbierung des Intervalls hat man zu rechnen:

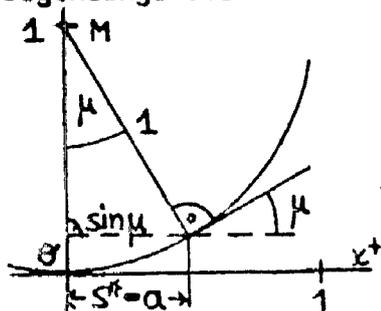
$$\begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \\ y'(\frac{1}{2}) = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} > y'_1 = \frac{1}{4} \\ > y'_2 = \frac{3}{4} \end{array} \right| s_{nw} = \underline{\underline{0,578125}} \text{ (+0,74 \%)}$$

d) Bei Teilung in 5 gleichbreite Intervalle:

$$\begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y'(0,1) = 0,2 \\ y'(0,2) = 0,4 \\ y'(0,3) = 0,6 \\ y'(0,4) = 0,8 \\ y'(0,5) = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} > y'_1 = 0,1 \\ > y'_2 = 0,3 \\ > y'_3 = 0,5 \\ > y'_4 = 0,7 \\ > y'_5 = 0,9 \end{array} \right| s_{nw} = \underline{\underline{0,5825}} \text{ (+1,5 \%)} \quad |||$$

Bemerkung: Zu empfehlen ist eine analoge Rechnung an einer Ellipse in Hauptlage; Kontrolldaten können dem Tabellenwerk "Vierstell. Log. ..." von E. WAAGE, pg. 77, zweitunterste Tabelle, entnommen werden. Günstige Angabe ist ell :  $x^2 + 4y^2 = 100$  mit  $P(6/4) \in \text{ell}$ ,  $u \approx 48,4425$ .

7. Wir überprüfen unsere Taschenrechner an der Ermittlung der Zahl  $\pi$  als Bogenlänge des halben Einheitskreises.



Verwendet wird (nach 4.):  $\frac{1}{\cos \mu} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \mu$ ,

wobei  $\mu$  sehr klein sei; laut Zeichnung gilt  $\sin \mu = a$ .

a) Im Intervall  $[0; a]$  wird zunächst mit dem Maximalwert  $\sin \mu$  gearbeitet:

$$s \approx a \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \right)$$

Um den halben Umfang des Einheitskreises zu erhalten, muß  $s$  mit  $\frac{180}{\mu}$  multipliziert werden ( $\frac{180}{\mu}$  gibt an, wie oft  $\mu$  in 180 enthalten ist); mit dem Taschenrechner erhält man  $\mu$  aus  $a$  als  $\arcsin a$  oder  $\sin^{-1} a$  oder INV SIN  $a$  zumeist im Gradmaß. Dies führt zu:

$$\pi \approx \frac{180a}{\arcsin a} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 \right) |||$$

b) Wird im Intervall  $[0; a]$  mit dem arithmetischen Mittel gearbeitet, so

$$\text{hat man anzusetzen: } \pi \approx \frac{180a}{\arcsin a} \cdot \left( 1 + \frac{1}{8} a^2 \right) |||$$

c) Wird im Intervall  $[0; a]$  mit dem geom. Mittel gearbeitet, so gilt:

$$\pi \approx \frac{180a}{\arcsin a}$$

d) Datenzusammenstellung bez. a), b) und c) :

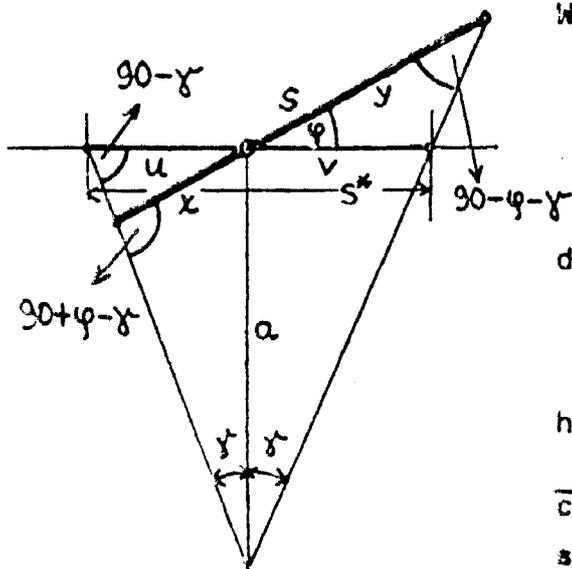
| a         | a)            | b)            | c)            |
|-----------|---------------|---------------|---------------|
| $10^{-1}$ | 3,152 023 465 | 3,140 262 183 | 3,136 341 756 |
| $10^{-2}$ | 3,141 697 381 | 3,141 579 573 | 3,141 540 304 |
| $10^{-3}$ | 3,141 593 703 | 3,141 592 525 | 3,141 592 132 |
| $10^{-4}$ | 3,141 592 701 | 3,141 592 689 | 3,141 592 686 |
| $10^{-5}$ | 3,141 592 654 | 3,141 592 654 | 3,141 592 654 |

1. Bemerkung: Wählt man in der Formel  $\pi \approx \frac{180a}{\arcsin a} \cdot (1+ka^2)$  den Wert  $a = \frac{1}{2}$  und für k den Wert  $\frac{4}{3} \cdot (\pi - 3)$ , so erhält man  $\pi$  genau.

2. Bemerkung: Wegen  $\lim_{a \rightarrow 0} (1+ka^2) = 1$  für  $a \rightarrow 0$  gilt  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{180a}{\arcsin a} = \pi$  für  $a \rightarrow 0$ , also auch  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sin \mu}{\mu} = 1$  ( $\mu$  im Bogenmaß!) für  $\mu \rightarrow 0$ .

3. Wir sehen (photographieren) eine Strecke von der Länge a.

Sie wird symmetrisch in das Blickfeld gebracht, der visuelle Mittelpunkt ist also der Endpunkt der Winkelsymmetrale (siehe Zeichnung). Auf die Frontalebene in diesem Endpunkt wird scharf eingestellt.



Wie die nebenstehende Zeichnung zeigt, gilt:

$$x : a = \sin \gamma : \sin(90 + \gamma - \varphi)$$

$$y : a = \sin \gamma : \sin(90 - \gamma - \varphi)$$

$$x = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\cos(\gamma - \varphi)}, \quad y = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\cos(\gamma + \varphi)}$$

daraus ergibt sich wegen  $s = x + y$  :

$$s = a \cdot \sin \gamma \cdot \left( \frac{1}{\cos(\gamma - \varphi)} + \frac{1}{\cos(\gamma + \varphi)} \right)$$

$$u = v = a \cdot \tan \gamma, \text{ also } s^* = 2a \cdot \tan \gamma;$$

hier kann eine Probe gemacht werden mit  $\varphi = 0$ .

$$\frac{1}{\cos(\gamma - \varphi)} + \frac{1}{\cos(\gamma + \varphi)} = \dots = \frac{4 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \varphi}{\cos 2\gamma + \cos 2\varphi}, \text{ also:}$$

$$s = a \cdot \sin \gamma \cdot \frac{4 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \varphi}{\cos 2\gamma + \cos 2\varphi} = \dots = 2a \cdot \frac{\sin 2\gamma \cdot \cos \varphi}{\cos 2\gamma + \cos 2\varphi}$$

$$\text{Abbildungsmaßstab: } \frac{s^*}{s} = 2a \cdot \tan \gamma : 2a \cdot \frac{\sin 2\gamma \cdot \cos \varphi}{\cos 2\gamma + \cos 2\varphi} = \frac{\cos 2\gamma + \cos 2\varphi}{2 \cdot \cos^2 \gamma \cdot \cos \varphi} \quad (III)$$

Behauptung:  $\frac{s^*}{s}$  ist stets  $\leq \cos \varphi$ ; das "="-Zeichen gilt nur für  $\gamma = 0$  (Normalprojektion) oder  $\varphi = 0$  (Frontalage) oder beides.

Zu beweisen ist also:  $\cos 2\gamma + \cos 2\varphi \leq 2 \cdot \cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi$  ( $0 \leq \gamma, \varphi < 90^\circ$ ).

$$\text{Beweis: } 2 \cdot \cos^2 \gamma - 1 + 2 \cdot \cos^2 \varphi - 1 \leq 2 \cdot \cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi,$$

$$\cos^2 \gamma + \cos^2 \varphi \leq 1 + \cos^2 \gamma \cdot \cos^2 \varphi. \text{ Diese Ungleichung hat die}$$

$$\text{Form: } a + b \leq 1 + a \cdot b \text{ mit } 0 \leq a, b \leq 1.$$

Nebenüberlegung: Aus  $1-a \geq 0$  und  $1-b \geq 0$  folgt  $(1-a)(1-b) \geq 0$ . Q.e.d.

**Berechnung der mittleren Leistung in Wechselstromkreisen**

Zur Berechnung der mittleren Leistung eines sinusförmigen Wechselstroms in einem nichtnotwendigerweise ohmschen Stromkreis hat man die Phasenlage zwischen der (sinusförmig) angenommenen Spannung und der sich in dem speziellen Stromkreis ergebenden sinusförmigen Stromstärke zu berücksichtigen:

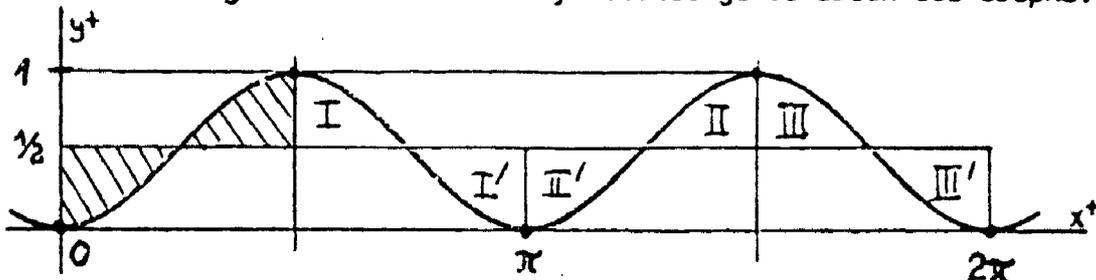
$$U(x) = U_0 \cdot \sin x, \quad I(x) = I_0 \cdot \sin(x+\mu); \quad \text{Periodenlänge } T = 2\pi.$$

Zu berechnen ist  $\frac{1}{2\pi} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin(x+\mu) dx$ .

Nach Anwendung des 1. Summensatzes ergibt sich die Anschreibung:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \left( \cos\mu \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx + \frac{1}{2} \cdot \sin\mu \cdot \int_0^{2\pi} \sin 2x dx \right).$$

Man erkennt sofort durch (gedachte) graphische Darstellung des 2. Summanden, daß dieser den Wert 0 hat. Auch für die Ermittlung des ersten Summanden nützt graphische Darstellung und Kenntnis der Symmetrieeigenschaften des Graphs.



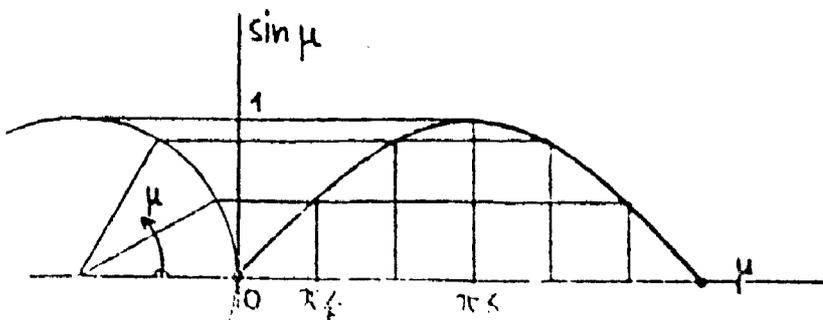
Die Zeichnung zeigt:  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi$ ; also gilt für die mittlere Leistung:

$$N = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \cdot \cos\mu$$

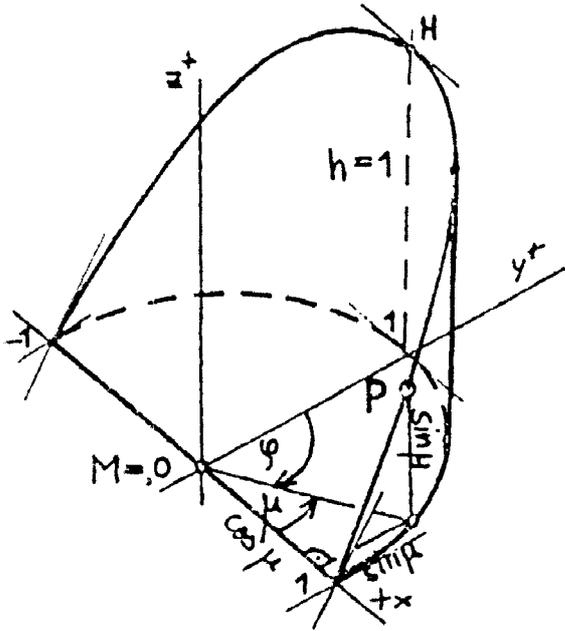
Bemerkung: Die oben verwendete plausible Ermittlung von  $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$  wirft die Frage auf, ob nicht etwa  $\int_0^{\pi} \sin x dx$  auf ebenso simple Art gefunden werden könne. Dies führt zu den Erläuterungen im nächsten Abschnitt.

0. Fläche unter der Sinus- bzw. Kosinusfunktion über einer Periodenlänge.

Zur Darstellung der Funktion  $\sin : \mu \rightarrow \sin \mu$  wird meist so vorgegangen, daß die Werte von  $\sin \mu$  als Ordinaten in einem kartesischen System betrachtet werden, wobei  $\mu$  im Bogenmaß gemessen wird. Somit ist die Berechnung von  $\int_0^{\pi} \sin \mu d\mu$  entweder (bei Kenntnis der Grundlagen der Integralrechnung) exakt möglich oder (wenn Integralrechnung noch nicht erörtert wurde) mit EDV-Methoden inform einer Flächenberechnung zumindest näherungsweise durchführbar (KEPLERsche Faßregel, NEWTONsche Dreieckelmethode, SIMPSON-Verfahren uaf.).

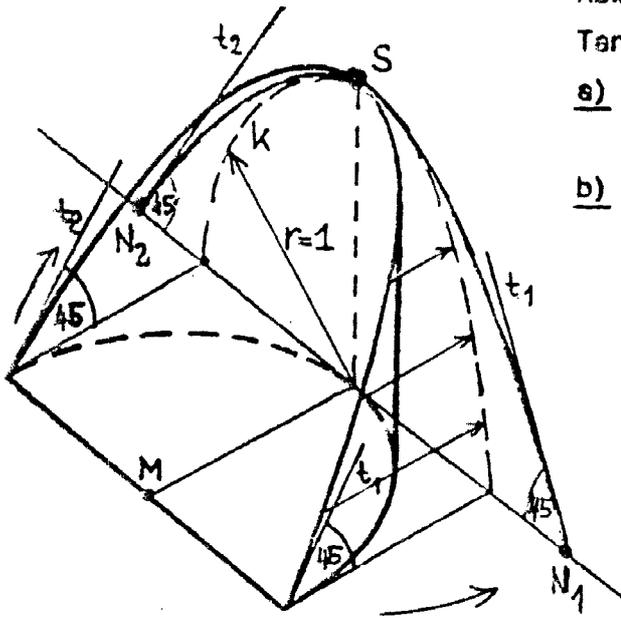


1. Räumliches Arbeiten mit Sinusstrecken.



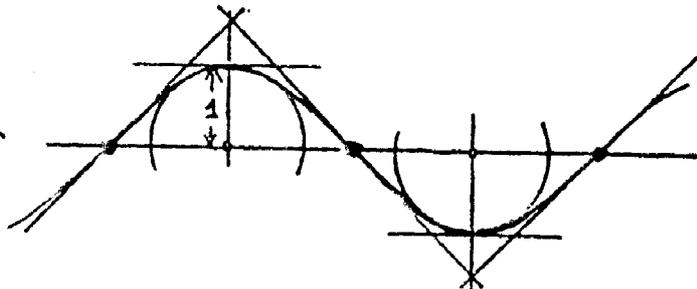
Stellt man die Sinusstrecken im jeweiligen Endpunkt normal zur  $x,y$ -Ebene auf, so ergibt sich eine Kurve im Raum, deren Punkte  $P$  die Koordinaten  $P(\cos\mu/\sin\mu/\sin\mu)$  haben. Also gilt für alle  $P$ :  $y_p - z_p = 0$ , d.h., sie liegen in einer Ebene mit der Gl.  $y-z=0$ ; diese Ebene geht durch die  $x$ -Achse und ist unter  $45^\circ$  gegen die  $x,y$ -Ebene geneigt. Somit bilden die Punkte  $P$ , weil Parallelprojektion eines Kreises auf eine Ebene vorliegt, eine Ellipse. Der entstandene Zylinderhuf hat als Mantelfläche je nach Abwicklungsart die Sinus- bzw. Kosinusfläche.

2. Konstruktionshilfen aufgrund der Erkenntnisse von 1.



Abwicklung der Mantelfläche auf die Tangentialebene der längsten Mantellinie ergibt:

- a) Tangentensteigung in den Nullstellen der Kosinuskurve ist  $45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$ .
  - b) Krümmungsradius im Scheitelpunkt hat den Radius 1 durch Projektion der Ellipsenlinie auf diese Tangentialebene.
- Dies führt zu wesentlichen Erleichterungen (und damit zu genaueren Darstellungen) der Sinus- bzw. Kosinuslinien (siehe unten).



3. Ermittlung des Inhalts der Kosinus- bzw. Sinusfläche zwischen aufeinanderfolgenden Nullstellen (unter Verwendung einer geeigneten Formelsammlung).

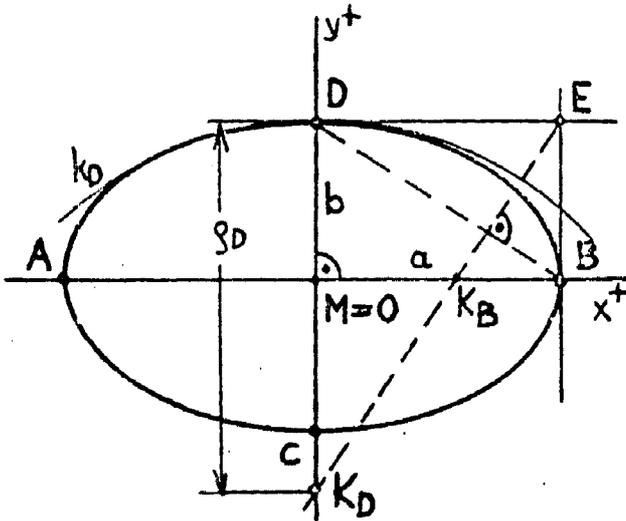
Die Veröbnung (Abwicklung) der Mantelfläche des unter 1. und 2. verwendeten speziellen Zylinderhufe ist flächeninhaltsinvariant. Man findet für Zylinderhufe, deren geradlinige Kante durch den Mittelpunkt des Basiskreises geht, die sogenannte "Formel ohne Druckfehler" :  $M = 2rh$ . In unserem Fall ergibt sich für die Kosinusfläche über dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$  der Wert 2, analog dazu für die Sinusfläche über  $[0; \frac{\pi}{2}]$  der Wert 1.

4. Tangentensteigung, Flächeninhalt und Scheitelkrümmungskreis von  $f: y=A \cdot \sin Bx$

(1) Zur Bestimmung der Tangentensteigung an den Nullstellen wende man die zugehörigen Orthogonalaffinitäten bez. der Koordinatenachsen an und erkenne:  
 Für  $f_1: y=A \cdot \sin x$  gilt  $k_N = \pm A$  bzw. für  $f_2: y=\sin Bx$  gilt  $k_N = \pm B$ .  
 Somit gilt für  $f: y=A \cdot \sin Bx$  :  $k_N = \pm A \cdot B$ .

(2) Zur Bestimmung der Flächeninhalte zwischen aufeinanderfolgenden Nullstellen wende man (wie unter (1)) die zugehörigen Orthogonalaffinitäten bez. der Koordinatenachsen an und erkenne:  
 Für  $f_1: y=A \cdot \sin x$  gilt  $F_1 = \pm 2 \cdot A$  bzw. für  $f_2: y=\sin Bx$  gilt  $F_2 = 2 \cdot \frac{1}{B}$ .  
 Somit gilt für  $f: y=A \cdot \sin Bx$  :  $F = \pm 2 \cdot \frac{A}{B}$ .

(3) Zur Bestimmung der Scheitelkrümmungsradien sind mehrere Überlegungen erforderlich. Man kann die Konstruktion der Scheitelkrümmungskreismitelpunkte einer Ellipse heranziehen, speziell die für den "Nebenscheitelpunkt" D.

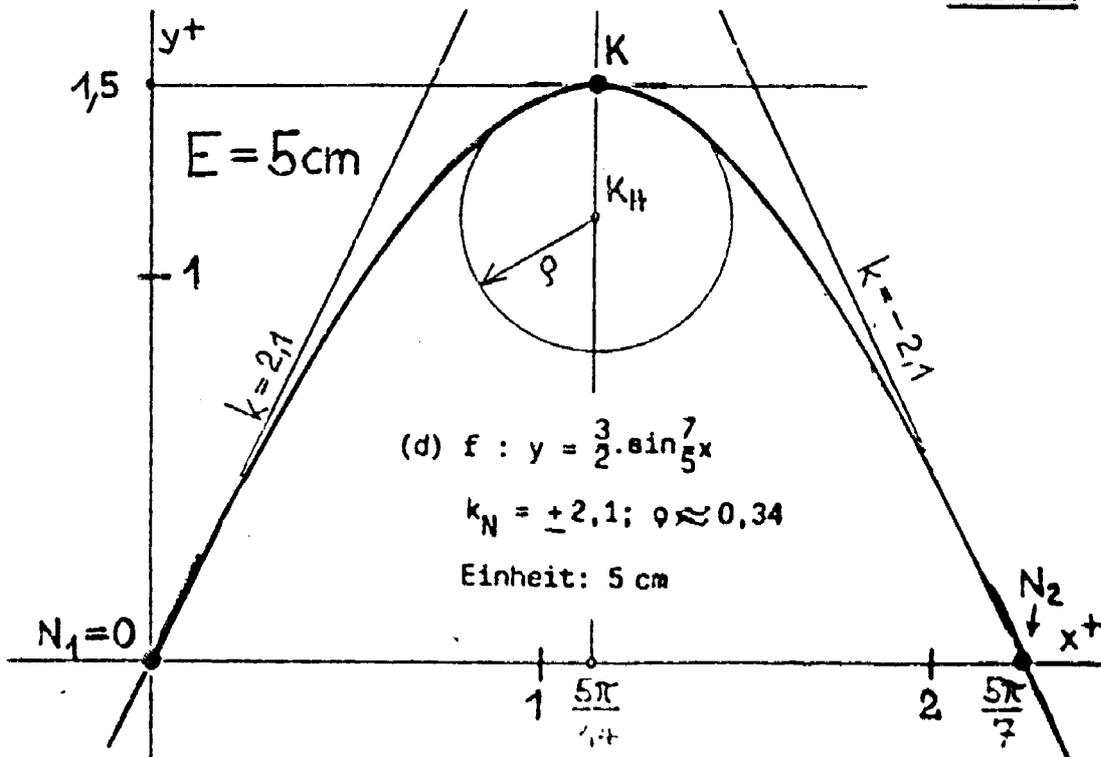


Wegen  $\triangle DMB \sim \triangle EDK$  gilt:  
 $a : b = \rho : a$  bzw.  $\rho = \frac{a^2}{b}$ .  
 Durch die oben angeführten Affinitäten werden die Scheitelkrümmungskreise von  $\sin : y=\sin x$  zu Ellipsen; der neue Scheitelkrümmungskreis ist der zugehörige Scheitelkrümmungskreis der durch die vorliegende Affinität entstandenen Ellipse.

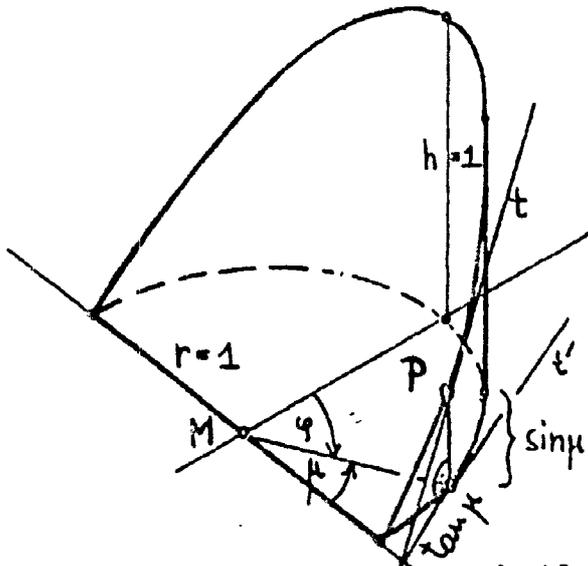
(a) Für  $f_1: y=A \cdot \sin x$  ergibt sich  $\rho = \frac{1}{A}$

(b) Für  $f_2: y=\sin Bx$  ergibt sich  $\rho = \frac{1}{B^2}$

(c) Somit gilt für  $f: y=A \cdot \sin Bx$  in den Scheitelpunkten:  $\rho = \frac{1}{A \cdot B^2}$ .



5. Propädeutische Vorgangsweise zur Integralrechnung bei der Berechnung des Flächeninhalts unter der Kosinuskurve.



Die nebenstehende Figur zeigt, daß die Steigungszahl der Tangente an die Ellipse im Punkt P leicht ermittelt werden kann :

$$k = \frac{\sin \mu}{\tan \mu} = \dots = \cos \mu .$$

Beim Durchlaufen der Ellipse von A(1/0/0) bis B(0/1/1) steigt der z-Wert pro  $\Delta \mu$  um etwa  $\cos \mu \cdot \Delta \mu$  .

Die Gesamtsteigungshöhe beträgt 1.

Somit gilt für kleine  $\Delta \mu$ -Werte:

$$\sum_{\mu=0}^{\pi/2} \cos \mu \cdot \Delta \mu \approx 1 .$$

Dies stimmt umso genauer, je kleiner die Schritte  $\Delta \mu$  sind.

Nun kann  $\sum_{\mu=0}^{\pi/2} \cos \mu \cdot \Delta \mu \approx 1$  als  $\sum_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot \Delta \varphi \approx 1$ , wobei  $\varphi$  der Komplementärwinkel zu  $\mu$  ist, als Flächenberechnung für  $\cos : y = \cos x$  über  $[0; \frac{\pi}{2}]$  gedeutet werden. Somit wurde ein tieferer Zugang zum Ergebnis von 3. gefunden.

Aus einem Brief von

Carl F. GAUSS an den Astronomen Wilhelm OLBERS vom 26.10.1802 :

"Gegen das Dozieren habe ich einmal eine wahre Abneigung; das Geschäft eines Professors der Mathematik ist doch im Grunde nur, das ABC seiner Wissenschaft zu lehren. Aus den wenigen Schülern, die einen Schritt weiter gehen, werden die meisten nur Halbwisser; denn die selteneren Anlagen wollen sich nicht durch Vorlesungen bilden lassen, sondern bilden sich selbst. Und mit diesen undankbaren Arbeiten verliert der Professor seine edle Zeit"

Aus einem Brief von

Carl F. GAUSS an Friedrich W. BESSEL vom 7.1.1810

(nach Übernahme der Professur in Göttingen) :

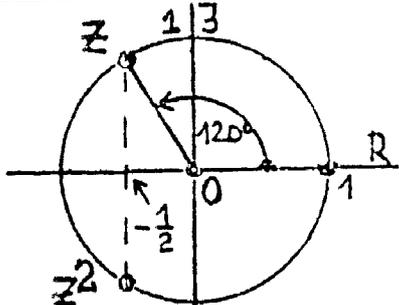
"Ich lese in diesem Winter zwei Collegia für 3 Zuhörer, wovon einer nur mittelmäßig, einer kaum mittelmäßig vorbereitet ist und dem dritten sowohl Vorbereitung als auch Fähigkeit fehlt. Das sind nun einmal die Oners einer mathematischen Professur"

**Konstruktion regelmäßiger Vielecke**

die dem Einheitskreis eingeschrieben sind

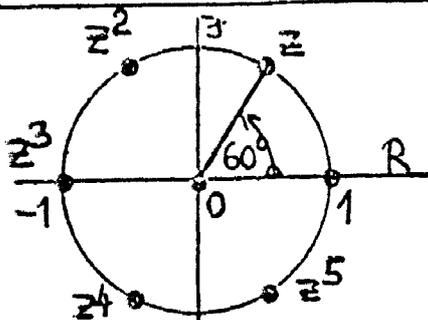
0. Konstruierbar sind alle jene regelmäßigen n-Ecke, für die gilt:  $2^{2^n} + 1 \in P$ .  
 Man erhält für  $n=0$  das 3-Eck, für  $n=1$  das 5-Eck, für  $n=2$  das 17-Eck,  
 für  $n=3$  das 257-Eck, für  $n=4$  das 65 537-Eck, jedoch für  $n=5$  kein konstruierbares n-Eck, weil  $4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$  gilt. Durch Winkelhalbierungen u.a. lassen sich weitere Konstruktionen ableiten.

1. Konstruktion des regelmäßigen Dreiecks



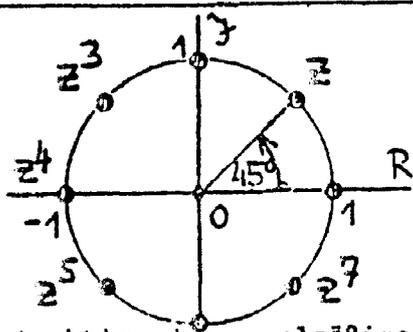
Zu lösen ist  $x^3 - 1 = 0$  in  $\mathbb{C}$  bzw.  $(x-1)(x^2+x+1)=0$ .  
 Man setze  $a = 2\cos\mu = z+z^2$  mit  $z=e^{i\mu}$  und  $\mu=120^\circ$ .  
 Die Lösungsmengen der Gleichungen, die durch Nullsetzen der beiden Faktoren über  $\mathbb{Z}$  entstehen, sind  $\{1\}$  bzw.  $\{z; z^2\}$ .  
 Also gilt  $z+z^2 = -1$ , somit  $\cos\mu = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$ .

2. Konstruktion des regelmäßigen 6-Ecks



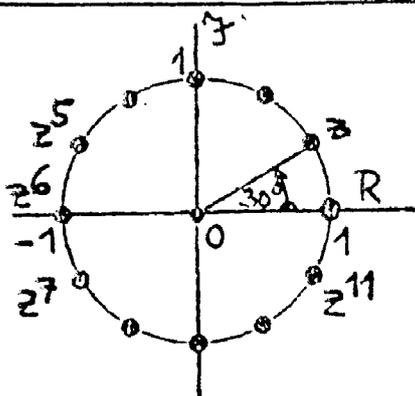
Zu lösen ist  $x^6 - 1 = 0$  bzw.  $(x^3-1)(x+1)(x^2-x+1)=0$ .  
 Die Lösungen von  $x^2-x+1=0$  sind  $z$  und  $z^5$  mit  $z = e^{i\mu}$  und  $\mu = 60^\circ$ .  
 Man setze nun  $a = z+z^5$  und erkenne:  $z^5 = -z^2$  wegen  $z^3 = -1$ .  
 Also gilt  $a = z - z^2 = 1$ ; somit:  $\cos\mu = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ .

3. Konstruktion des regelmäßigen 8-Ecks



Zu lösen ist  $x^8 - 1 = 0$  in  $\mathbb{C}$  bzw.  $(x^4-1)(x^4+1)=0$ .  
 Die Lösungen von  $x^4+1=0$  sind  $z, z^3, z^5$  und  $z^7$  mit  $z = e^{i\mu}$  und  $\mu = 45^\circ$ . Man setze nun:  
 $a = 2\cos\mu = z+z^7$  und bilde:  
 $a^2 = z^2+2+z^{14}$ ; wegen  $z^4 = -1$  gilt  $z^{12} = -1$ , also auch  $a^2 = z^2+2-z^2$ ; somit  $\cos\mu = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$ .

4. Konstruktion des regelmäßigen 12-Ecks



Zu lösen ist  $x^{12} - 1 = 0$  bzw.  $(x^6-1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)=0$ .  
 Die Lösungen von  $x^4-x^2+1=0$  sind  $z, z^5, z^7, z^{11}$  mit  $z = e^{i\mu}$  und  $\mu = 30^\circ$ . Man setze nun:  
 $a = z+z^{11}$  und bilde  $a^2 = z^2+2+z^{22}$ ; wegen  $z^6 = -1$  gilt auch  $z^{18} = -1$ , also  $z^{22} = -z^4$ . Dies führt zu:  
 $a^2 = z^2+2-z^4$ ; weil  $z$  Lösung von  $x^4-x^2+1=0$  ist, kann man schreiben:  $a^2 = z^2+2-z^2+1 = 3$ ;  
 somit ergibt sich:  $\cos\mu = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}}$ .

5. Konstruktion des regelmäßigen 5-Ecks

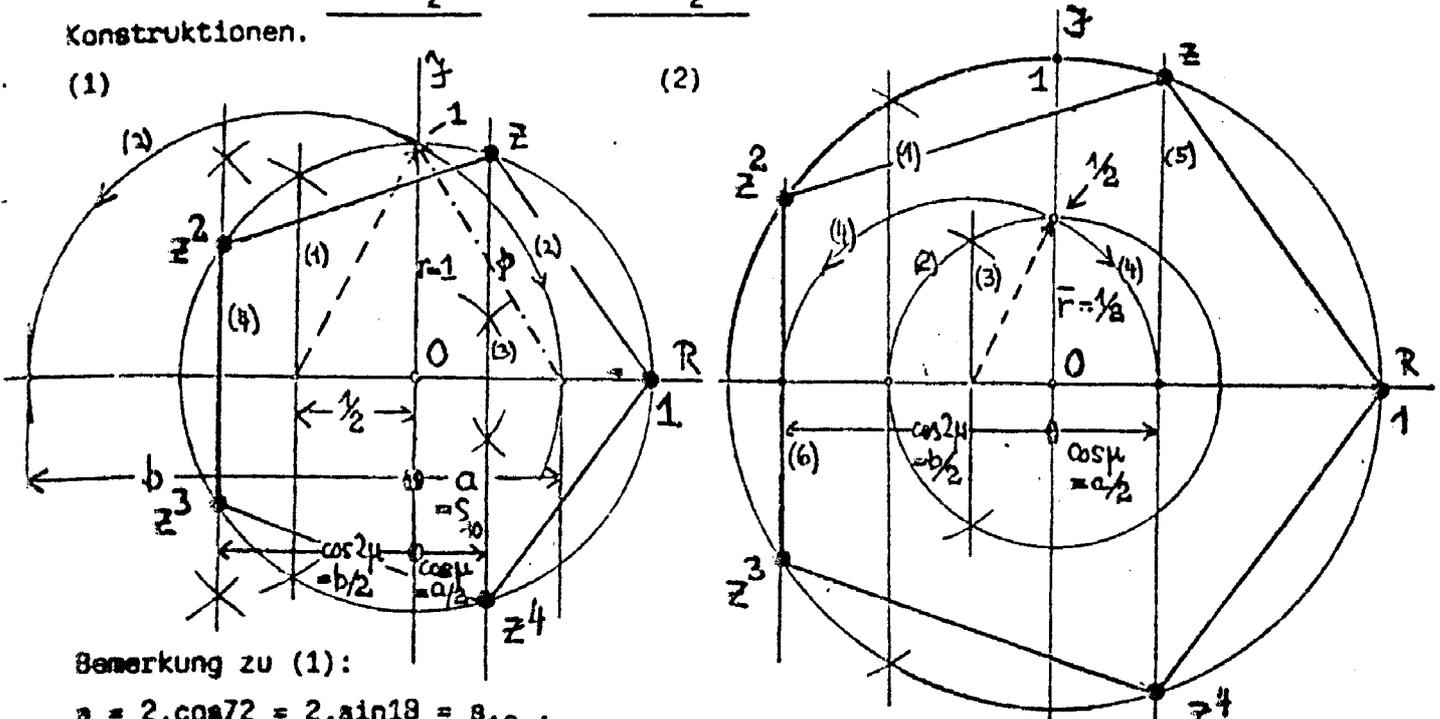
Zu lösen ist  $x^5 - 1 = 0$  in  $\mathbb{C}$  bzw.  $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ . Die Lösungen von  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  sind  $z, z^2, z^3$  und  $z^4$  mit  $z = e^{i\mu}$  und  $\mu = 72^\circ$ .

Man setze  $a = z + z^4 = 2\cos\mu$  und  $b = z^2 + z^3 = 2\cos 2\mu$ .

Sofort ist zu erkennen:  $a+b = -1$ ; dann durch Ausmultiplizieren von  $(z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^6+z^4+z^7 = z^3+z^4+z^2 = -1$  sieht man auch  $a \cdot b = -1$ .

Also sind  $a$  und  $b$  die Lösungen der Gleichung  $y^2 + y - 1 = 0$ . Beachtet man  $a > 0$ ,

so erhält man:  $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  und  $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . Dies führt zu den untenstehenden Konstruktionen.



Bemerkung zu (1):

$$a = 2 \cdot \cos 72^\circ = 2 \cdot \sin 18^\circ = \frac{a_5}{10}$$

Bemerkung zu (2): Es wurden  $\cos\mu = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  und  $\cos 2\mu = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$  mittels  $\bar{r} = \frac{1}{2}$  konstruiert.

6. Konstruktion des regelmäßigen 10-Ecks (analog zu Seite 2)

Zu lösen ist  $x^{10} - 1 = 0$  in  $\mathbb{C}$  bzw.  $(x^5 - 1)(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$ .

Man setze  $c = z + z^9$  und  $d = z^3 + z^7$  mit  $z = e^{i\mu}$  und  $\mu = 36^\circ$ .  $z$  ist Lösung von  $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ ; ferner gilt  $z^5 = -1$ . Es ergibt sich  $c+d=1, c \cdot d = -1$ , also sind  $c$  und  $d$  (mit  $c > 0$ ) die Lösungen der Gleichung  $y^2 - y - 1 = 0$ :

$$c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad d = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Bemerkung: Für die in Zeichnung (1) strichpunktierte Strecke  $p$  gilt:

$$\begin{aligned} p^2 &= 1 + (z^2 + z^8)^2 = 1 + z^4 + 2z^{10} + z^{16} = 3 + z^4 - z = 3 + z^3 - z^2 - 1 = 4 - (z^{18} + 2z^2) = \\ &= 4 - (z + z^9)^2 = 4 - c^2 = 4 - 4\cos^2 36^\circ = 4\sin^2 36^\circ = (2\sin 36^\circ)^2; \text{ somit erhält} \\ \text{man: } p &= \underline{\underline{a_5}} \end{aligned}$$



**Exakte Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks**

das dem Einheitskreis eingeschrieben ist, nach C.F. GAUSS (1777-1855); er erkannte die Möglichkeit am 30. März 1796 und veröffentlichte die zugehörige Arbeit in "Disquisitiones arithmeticae" auf Seite 662 (1801).

0. Zu lösen ist  $q^{17}-1=0$ , also  $q^{16}+q^{15}+\dots+q+1=0$  in  $\mathbb{C}$ .

Es sei  $z = e^{i\mu}$ ,  $\mu = \frac{2}{17}$  mit  $\operatorname{Re}(z) = \cos \mu$ .

1. Man setze  $a = z+z^2+z^4+z^8+(z^{16}+z^{15}+z^{13}+z^9) = 2.(\cos\mu+\cos2\mu+\cos4\mu+\cos8\mu)$ ,  
somit reell (weil  $z^k$  konj. kompl. zu  $z^{17-k}$  ist, also  $z^k+z^{17-k} = 2.\cos k\mu$  gilt).

Ebenso:  $b = z^3+z^5+z^6+z^7+(z^{14}+z^{12}+z^{11}+z^{10}) = 2.(\cos3\mu+\cos5\mu+\cos6\mu+\cos7\mu)$ .

Es ist sofort zu erkennen:  $a+b=-1$ ; daß  $a.b=-4$  gilt, erfährt man durch Ausmultiplizieren von  $a$  mit  $b$  (es ergibt sich jede Potenz von  $z$  genau viermal unter Berücksichtigung von  $z^{17}=1$ ).

Somit sind  $a$  und  $b$  die Lösungen der Gleichung  $x^2+x-4=0$ ; also erhält man:

$$a = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad b = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad (a>0, b<0).$$

2. Ebenso setze man  $c = z+z^4+(z^{16}+z^{13}) = 2.(\cos\mu+\cos4\mu)$  und  
 $c' = z^2+z^8+(z^{15}+z^9) = 2.(\cos2\mu+\cos8\mu)$ .

Man erkennt:  $c+c' = a$  und (wie unter 1.)  $c.c' = -1$ .

Somit sind  $c, c'$  die Lösungen der Gleichung  $x^2-ax+1=0$ ;

also gilt:  $c = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$  ( $c'$  wird weiterhin nicht benötigt).

3. Ebenso setze man  $d = z^3+z^5+(z^{14}+z^{12}) = 2.(\cos3\mu+\cos5\mu)$  und  
 $d' = z^6+z^7+(z^{11}+z^{10}) = 2.(\cos6\mu+\cos7\mu)$ .

Man erkennt:  $d+d' = b$  und (wie unter 1.)  $d.d' = -1$ .

Somit sind  $d, d'$  die Lösungen der Gleichung  $x^2-bx+1=0$ ;

also gilt:  $d = \frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$  ( $d'$  wird weiterhin nicht benötigt).

4. Letztlich setze man  $e = z+(z^{16}) = 2.\cos\mu$  und  $f = z^4+(z^{13}) = 2.\cos4\mu$ .

Man erkennt:  $e+f = c$  und (wie unter 1.)  $e.f = d$ .

Somit sind  $e, f$  die Lösungen der Gleichung  $x^2-cx+d=0$ ;

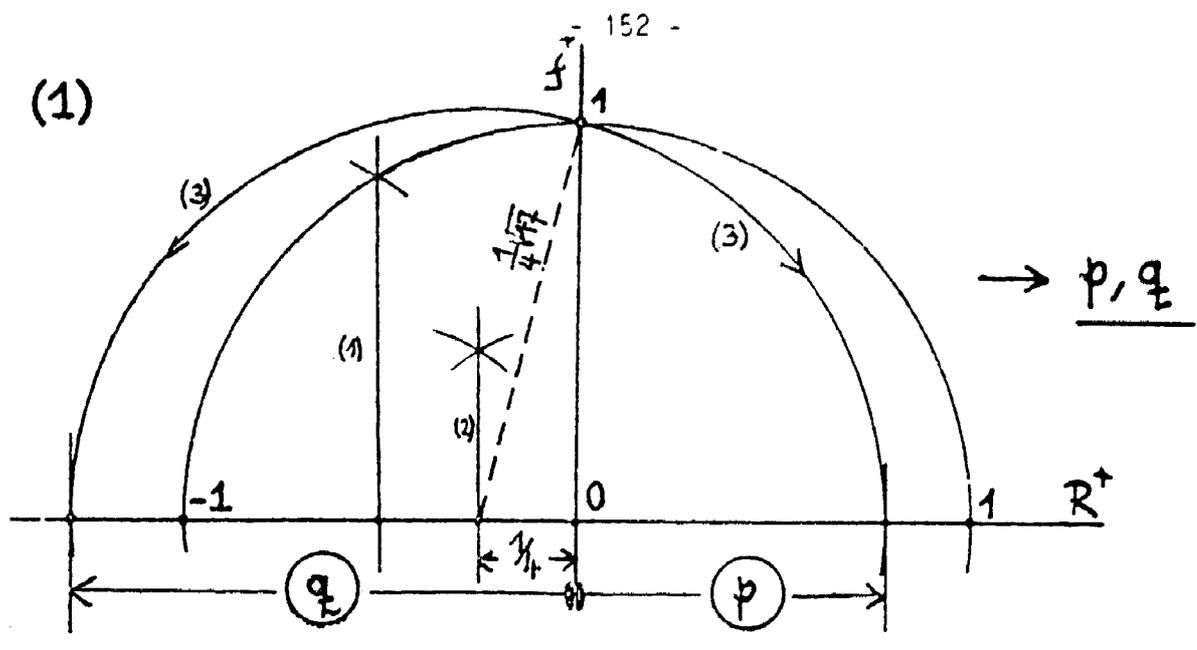
also gilt:  $e = \frac{c+\sqrt{c^2-4d}}{2}$  und  $f = \frac{c-\sqrt{c^2-4d}}{2}$ .

5. Zum Konstruieren verwende man die Lösungen von 1. bis 4. und beachte am Ende:  
 $e = 2.\cos\mu$  bzw.  $f = 2.\cos4\mu$  (führt zu genaueren Zeichenergebnissen).

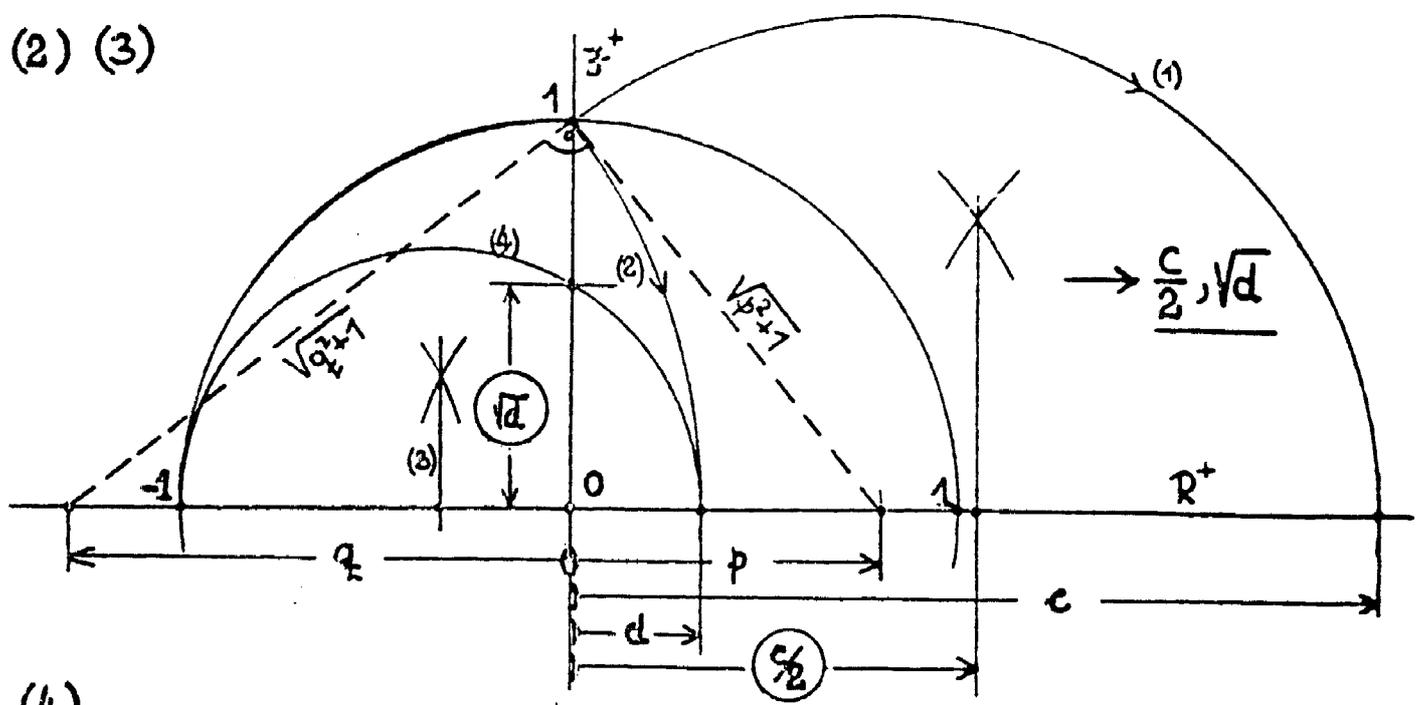
6. Die zugehörigen Zeichnungen werden platzsparend, wenn man folgende Substitutionen durchführt: (1)  $p = \frac{a}{2}$ ,  $q = -\frac{b}{2}$ ; also  $p = \sqrt{1+(\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{4}$ ,  $q = \sqrt{1+(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{4}$ ;  
dann ist: (2)  $c = \sqrt{p^2+1} + p$  (3)  $d = \sqrt{q^2+1} - q$   
(4)  $e = \frac{c}{2} + \sqrt{(\frac{c}{2})^2-d}$ ,  $f = \frac{c}{2} - \sqrt{(\frac{c}{2})^2-d}$ .

7. Zur numerischen Kontrolle der Konstruktion mögen die folgenden Zahlenwerte dienen:  
 $p=0,781$ ;  $q=1,281$ ;  $c=2,049$ ;  $d=0,344$ ;  $e=1,865$ ;  $f=0,185$ ;  $\mu=21^\circ 10' 35''$ ;  $4\mu=84^\circ 42' 21''$ .

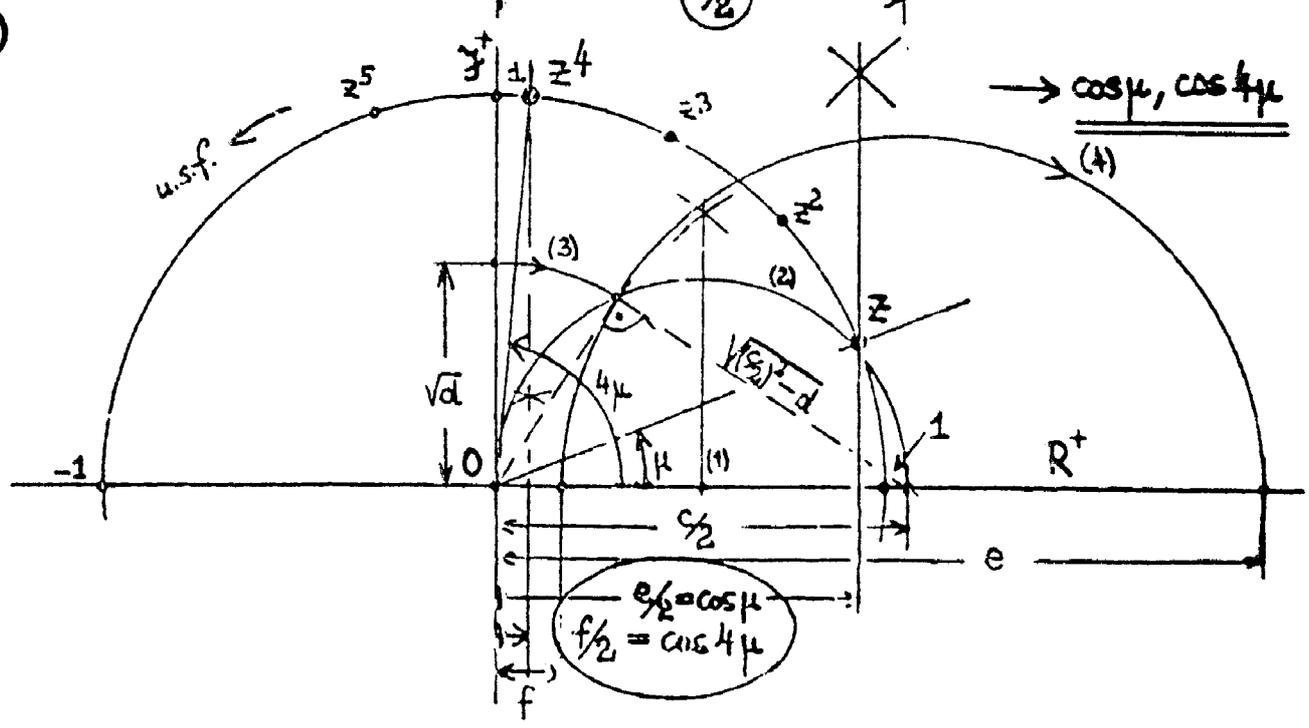
(1)



(2) (3)



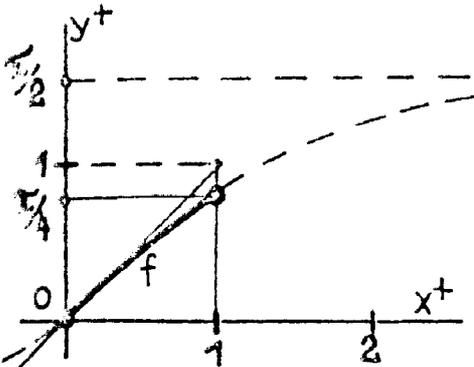
(4)



Eine didaktisch interessante Aufgabe aus der Analysis

- (0) In Formelsammlungen kann man lesen:  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$   
 (LEIBNIZ-Reihe, "numero deus impari gaudet"). Programmierbare Rechner liefern durch Summierung der einzelnen GröÙe nicht den angegebenen Wert (siehe auch "Zusammenstellung und Ergänzung" auf pg. 16). Man kann nun interessierten Schülern der 6. Klassen, die in Informatik bzw. EDV eingeführt wurden und die die Grundlehren der Differentialrechnung bzw. Integralrechnung noch nicht erhalten haben, plausibel machen, daß der Wert  $\frac{\pi}{4}$  als Reihensumme richtig und somit der vom Computer ermittelte Wert falsch ist.  
 Dies wird im Folgenden behandelt.

- (1) Bei der Suche nach Funktionen, die an numerisch möglichst einfachen Stellen den Funktionswert  $\frac{\pi}{4}$  haben, stößt man auf die Funktion  $f : x \rightarrow \arctan x$  mit  $f(1) = \frac{\pi}{4}$  (Hauptwert). Grundgedanke der weiteren Vorgangsweise:



Man ersetze die Funktion  $f$  durch eine unendliche Summe von (einfachen) Funktionen derart, daß an jeder Stelle von  $[0;1[$  die Summe der Steigungszahlen dieser Funktionen gleich der Steigungszahl von  $f$  ist. Wenn nun alle Graphen dieser Hilfsfunktionen so wie  $f$  selbst durch den Ursprung gehen, ersetzt ihre Summe die Funktion  $f$ .

- (2) Man kann die Steigungszahlen der Tangenten  $k_t(a)$  für  $f$  an der Stelle  $a$  direkt berechnen:

$$k_t(a) \approx \frac{\arctan(a+h) - \arctan a}{h}; \text{ unter Anwendung der Formel}$$

$$\arctan u - \arctan v = \arctan \frac{u-v}{1+u \cdot v} \text{ erhält man:}$$

$$k_t(a) \approx \frac{1}{h} \cdot \arctan \frac{a+h-a}{1+(a+h)a} = \frac{1}{h} \cdot \arctan \frac{h}{1+(a+h)a} \approx \frac{1}{1+a^2} \text{ (wegen } \frac{\arctan h}{h} \approx 1 \text{ für sehr kleine } |h| \neq 0).$$

- (2') Man kann die Steigungszahl  $k_t(a)$  von  $f$  an der Stelle  $a$  auch mithilfe der inversen Funktion  $f^* : x \rightarrow \tan x$  an der Stelle  $b$  mit  $a = \tan b$  ermitteln.

$$k_t^*(b) \approx \frac{\tan(b+h) - \tan b}{h} = \frac{\tan(b+h) - \tan b}{1 + \tan(b+h) \cdot \tan b} \cdot \frac{1 + \tan(b+h) \cdot \tan b}{h} = \frac{\tanh}{h} \cdot (1 + \tan(b+h) \cdot \tan b) \approx \approx 1 + \tan^2 b \text{ für sehr kleine } |h| \neq 0; k_t(a) \text{ ergibt sich durch Kehrwertbildung:}$$

$$\underline{\underline{k_t(a) = \frac{1}{1+a^2} .}}$$

Zusammenfassung: Die Tangentensteigungsfunktion von  $f : x \rightarrow \arctan x$  ist

$$t_f : x \rightarrow \frac{1}{1+x^2} .$$

(3) Für  $x \in [0; 1[$  gilt (unendl. geom. Reihe):  $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

Man hat also Funktionen (sog. "Stammfunktionen  $F_n$ ") zu finden, deren Tangentensteigungsfunktionen der Reihe nach  $1, -x^2, x^4, -x^6$  usw. sind. Ihre Summe ersetzt, sofern alle den Ursprung enthalten, die Funktion  $f$ . Man startet den Versuch mit Polynomfunktionen und wird fündig:  $p : x \rightarrow \mu \cdot x^k$ . Für solche muß gelten:  $\mu \cdot (x+h)^k - \mu \cdot x^k \approx h \cdot x^n$  bzw.  $\mu \cdot x^k \cdot (1+\frac{h}{x})^k - \mu \cdot x^k \approx \mu \cdot x^k \cdot (1+k\frac{h}{x}) - \mu \cdot x^k = \mu \cdot x^k \cdot k \cdot \frac{h}{x} \approx h \cdot x^n$  bzw.  $\mu \cdot x^k \cdot k \approx x^{n+1}$ ; daraus:  $k = n+1$  und  $\mu = \frac{1}{n+1}$  für  $|h| > 0$  und sehr klein.

Ergebnis:  $F_n : x \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$  (Graph geht durch den Ursprung).

(4) Nach (3) gilt in  $[0; 1[$ :  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

Man wähle nun einen Wert  $\beta$  so nahe bei 1, daß unser bester Rechner keinen Unterschied zwischen  $\arctan \beta$  und  $\beta - \frac{1}{3} \cdot \beta^3 + \frac{1}{5} \cdot \beta^5 - \frac{1}{7} \cdot \beta^7 + \dots$  anzeigt.

Steht ein besserer Rechner zur Verfügung, der z.B. doppelt soviel Rechtskommastellen ausrechnet, so rücke man mit  $\beta$  noch näher an 1 heran. Glücklicherweise gibt es ja keine größte Zahl  $< 1$ . Somit ist plausibel:

$$\underline{\underline{\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}}$$

Zusammenstellung und Ergänzung

(a)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$  ( $\approx 0,6931471805$ , "MERCATOR - Reihe" nach Nicolaus M., 1620 - 1687)

(b)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$  ( $\approx 0,7853981635$ , "LEIBNIZ - Reihe" nach Gottfried Wilhelm L., 1646 - 1716)

(c)  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \dots = \frac{1}{3} \cdot (\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}})$  ( $\approx 0,8356488483$ )

(d)  $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2})$  ( $\approx 0,8669729873$ )

1. Bemerkung: Ein 10-ziffrig arbeitender Rechner beendet die Aufsummierung von

(a) nach ca  $1,4 \cdot 10^5$  Gliedern mit dem Wert  $0,693144152$  ( $\approx -4,3 \cdot 10^{-4} \%$ )

(b) nach ca  $7,1 \cdot 10^4$  Gliedern mit dem Wert  $0,785395140$  ( $\approx -3,8 \cdot 10^{-4} \%$ )

(c) nach ca  $4,8 \cdot 10^4$  Gliedern mit dem Wert  $0,835645826$  ( $\approx -3,6 \cdot 10^{-4} \%$ )

(d) nach ca  $3,6 \cdot 10^4$  Gliedern mit dem Wert  $0,866969969$  ( $\approx -3,5 \cdot 10^{-4} \%$ )

(ermittelt mit HP 97 Calculator).

2. Bemerkung: Die zu (a) bis (d) gehörenden Reihen der Absolutbeträge sind wegen Unbeschränktheit divergent, wie leicht erkannt werden kann.

3. Bemerkung:

In (3) wurde implizit die Potenzregel der DR bzw. der IA (propädeutisch) verwendet. Im Folgenden werden einige Herleitungen jener Potenzregel, die im normalen Unterricht kaum üblich sind, erörtert. Diese Herleitungen können zusätzliche Einsichten vermitteln.

(A) Grundwissen:  $(1+\mu)^n \approx 1+\mu \cdot n$  für sehr (absolut) kleine  $\mu$ -Werte.

Anwendung:

Gegeben sei  $f: x \rightarrow x^n$ .  $k_{t;f}(a) \approx \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \frac{a^n \cdot (1+\frac{h}{a})^n - a^n}{h} \approx \frac{a^n}{h} \cdot \left[1+n \cdot \frac{h}{a} - 1\right] = \frac{a^n}{h} \cdot n \cdot \frac{h}{a} = \underline{\underline{n \cdot a^{n-1}}}$ .

Nebenbeweis für  $(1+\mu)^n \approx 1+\mu \cdot n$  für abs. kleine  $\mu$ -Werte durch vollst. Ind.:

$$(1+\mu)^{n+1} = (1+\mu)^n \cdot (1+\mu) \approx (1+n\mu) \cdot (1+\mu) = 1+n\mu+\mu+n\mu^2 \approx 1+(n+1) \cdot \mu, \text{ q.e.d.}$$

(B) 1. Grundwissen: Bei Verkettung von Linearfunktionen multiplizieren sich die Steigungszahlen (d.i. Linearisierung der Kettenregel der DR).

2. Grundwissen: Für  $\exp: x \rightarrow e^x$  gilt:  $k_{t;\exp}(x) = e^x$  ("Irgendetwas Wesentliches muß man doch auch heute noch über die Exponentialfunktion lehren dürfen!"); Zitat nach Dr. W. KRANZER (†25. März 1988) vom 13.12.1984).

Anwendung:

Es sei  $f: x \rightarrow x^n$  gegeben durch die Verkettung  $f = f_1 \circ f_2$  mit  $f_1: x \rightarrow n \cdot \ln x$  und  $f_2: x \rightarrow e^x$ ; hierbei gilt:  $k_{t;f_1}(a) = \frac{n}{a}$  (weil  $\ln$  invers zu  $\exp$  ist)

und  $k_{t;f_2}(b) = e^b$  mit  $b = n \cdot \ln a$ . Somit ergibt sich:

$$k_{t;f_1 \circ f_2}(a) = \frac{n}{a} \cdot e^b = \frac{n}{a} \cdot e^{n \cdot \ln a} = \frac{n}{a} \cdot a^n = \underline{\underline{n \cdot a^{n-1}}}$$

(C) Grundwissen (z.B. aus GeZ):

Für  $\text{par}: x \rightarrow x^2$  gilt  $k_t(x) = 2x$  (dient in diesem Fall als Induktionsbasis).

Anwendung:

$f: x \rightarrow x^n$  sei an der Stelle  $a$  linearisiert auf  $f_1: x \rightarrow kx+d$  mit  $d = a^n - a \cdot k$  und  $k = n \cdot a^{n-1}$  (Induktionsbehauptung i.d.F.).

Schluß von  $n$  auf  $n+1$ : Aus  $\text{id} \cdot f: x \rightarrow x^{n+1}$  wird nach Linearisierung (siehe oben)  $\text{id} \cdot f_1: x \rightarrow kx^2+dx$  mit  $k_{t;\text{id} \cdot f_1}(a) = 2ak+d = 2ak+(a^n-ak) = ak+a^n = a \cdot n \cdot a^{n-1} + a^n = \underline{\underline{(n+1) \cdot a^n}}$ , q.e.d.

(Anmerkung: Unter "id" verstehe man die "Identische Funktion"  $x \rightarrow x$ )